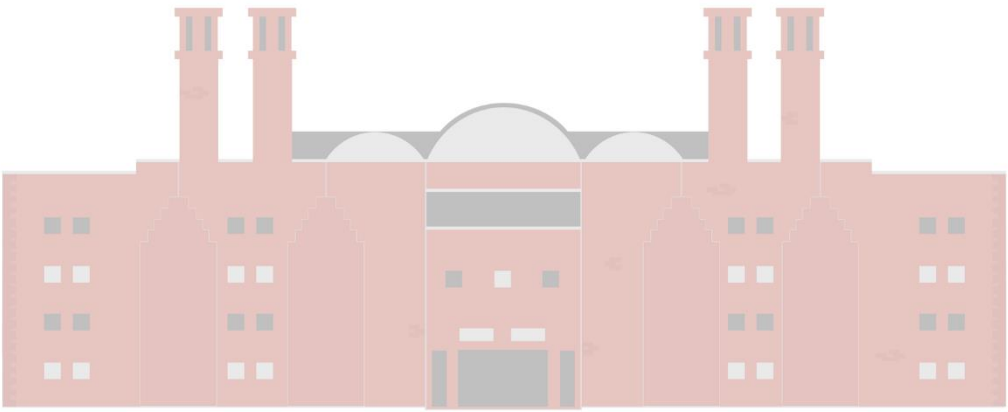
RED BUILDING TEAM

التحليل الرياضي ٣

المحاضرة الثامنة

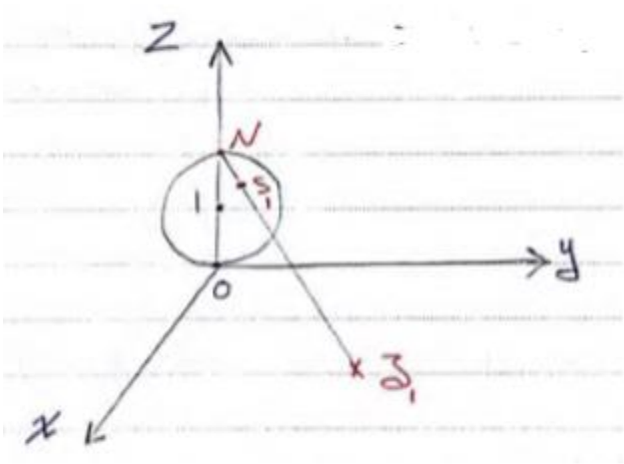
9 صفحات



الدكتور: معاذ عبد المجيد

التاريخ: 2014/10/16

مفهوم المستوي العقدي



المتحول العقدي:

إذا كان x , y أو ρ , φ متحولين حقيقيين فإن:

$z = x + iy = \rho . e^{i\varphi}$ يسمى متحول عقدي.

المجموعات العقدية:

جوار نقطة:

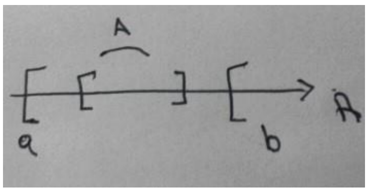
لتكن $z_0 \in \mathbb{C}$ حسب تعريف الجوار هو أي مجموعة مفتوحة تحوي هذه النقطة .

$$\left| |z - z_0| \right| < \delta : \quad \delta > 0$$

المجموعة المفتوحة:

لتكن $A \in \mathbb{C}$ إذا وجد لكل نقطة من هذه المجموعة جوار مفتوح محتوى بالكامل داخل A فتسمى مجموعة مفتوحة.

نقول عن $z_0 \in A$ نقطة تجمع أو تراكم أو نهاية للمجموعة A إذا حوى أي جوار منها نقاط من A مختلفة عن z_0.



نقاط النهاية قد تنتمي للمجال أو لا تنتمي.

المجموعة المغلقة:

هي المجموعة التي تحوي جميع نقاط النهاية فيها.

المجموعة المترابطة:

نقول عن A أنها مترابطة إذا أمكن وصل أي نقطتين منها بمنحني مستمر يقع بالكامل داخلها.

المنطقة:

هي مجموعة مفتوحة ومترابطة.

- المجموعة المفتوحة هي متممة المجموعة المغلقة.
- مجموعة النقاط المحققة لمساواة تمثل منحني في المستوي العقدي.
- مجموعة النقاط المحققة لمتراجحة تمثل منطقة في المستوي العقدي(مغلقة أو مفتوحة).

أمثلة:

$$1)\ ||z|| = 1$$

وهي جميع النقاط التي بعدها عن o يساوي الواحد أي تمثل دائرة مركزها o ونصف قطرها 1.

أما

$$||z - z_0|| = a : a \in \mathbb{R}^+$$

فهي تمثل دائرة مركزها z_0 ونصف قطرها a .

$$2)\ o \leq ||z - z_0|| \leq a$$

تمثل قرص دائري مغلق مركزه z_0 باستثناء o .

$$3)\ ||z - z_0|| > a$$

تمثل المنطقة خارج القوس.

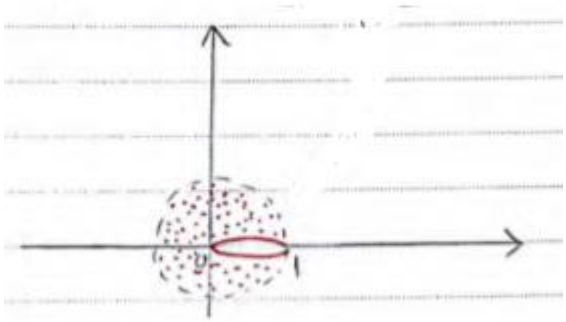


$4)\ 0 < \left|\left|z - z_0\right|\right| < a$

تمثل قرص دائري مفتوح مركزه z_0 ونصف قطره a.

$5)\ A = \{z \in \mathbb{C}: \left|\left|z\right|\right| < 1\ and\ 0 < \arg z < 2\pi\}$

وهي تمثل قرص مشقوق عبر ox^+ إلى o



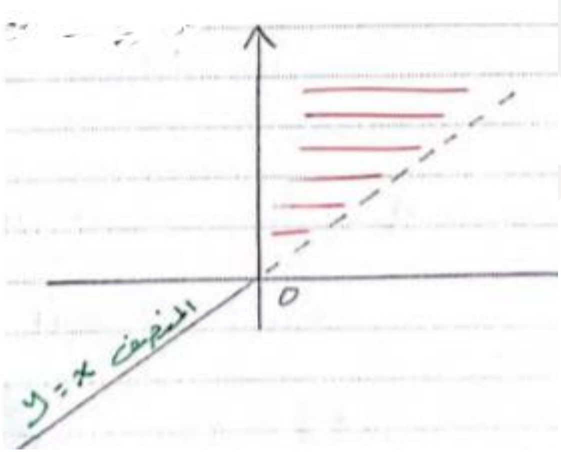
$6)\ z = \bar{z} \leftrightarrow x = x\ , \qquad y = -y \rightarrow y = 0$

تمثل محور $\overrightarrow{ox}$

$7)\ Im(z) > Re(z) \geq 0$

$y \quad > \quad x \quad \geq 0$

منصف الربع الأول



$8)\ \left|\left|z - 2\right|\right| \geq Re(z) > 0$

$$\left|\left|(x + iy) - 2\right|\right| = \sqrt{(x^2 - 2) + y^2} \geq x > 0$$

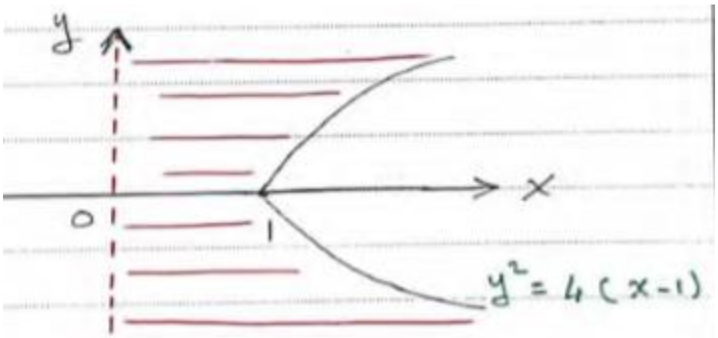
نربع لأنه أكبر من 0

$(x - 2)^2 + y^2 \geq x^2 > 0$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 - x^2 \geq 0$

قطع مكافئ $y^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow y^2 = 4(x-1)$

$y^2 - 4x + 4 \geq 0$



مثال:

حل المعادلة: $iz^3 + (1+i)z^2 + z = 0$

تذكرة: كل معادلة من الدرجة n لها n جذر

الحل: $z[iz^2 + (1+i)z + 1] = 0 \rightarrow z_1 = 0$

$$\Delta = (1+i)^2 - 4i = 1 + 2i + i^2 - 4i = -2i$$

$$= 2e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)}$$

نحسب جذور $\Delta = -2i$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\pi k\right)} \quad : k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 0 \rightarrow \left(\sqrt{\Delta}\right)_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 + i$$

$$k = 1 \rightarrow \left(\sqrt{\Delta}\right)_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = 1 - i$$

$$z_2 = \frac{-(1+i)+(-1+i)}{2i} = -\frac{1}{i} = i$$

$$z_3 = \frac{-(1+i)+(1-i)}{2i} = -1$$

مثال:

إذا كان $z = \frac{(1-7i)(2-i)}{5+12i}$

أكتب $Re(z), Im(z), ||z||, \arg z$

الحل:

$$z = \frac{(2-i-14i-7)(5-12i)}{(5+12i)(5-12i)}$$

$$= \frac{(-5-15i)(5-12i)}{169} = \frac{-25+60i-75i-180}{169}$$

$$= \frac{-205-15i}{169} = -\frac{205}{169} - i\frac{15}{169}$$

$$Re(z) = -\frac{205}{169}$$

$$Im(z) = -\frac{15}{169}$$

$$||Z|| = \sqrt{\left(-\frac{205}{169}\right)^2 + \left(-\frac{15}{169}\right)^2} = 1.216$$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

$$\arg z = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{-\frac{15}{169}}{-\frac{205}{169}} = \tan^{-1}\frac{15}{205}$$

وهي تقع في الربع الثالث

ملاحظة: عند حساب هذه النتيجة بالآلة الحاسبة نضيف π للنتيجة لأننا في الربع الثالث، أما لو حسبنا الزاوية باستخدام $\cos$, $\sin$ فلسنا بحاجة لزيادة π

مثال:

حل المعادلة: $z^4 + z^2 + 1 = 0$

الحل:

بفرض $z^2 = t$

$$t^2 + t + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2$$

$$\sqrt{\Delta} = \pm i\sqrt{3}$$

$$t_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)}$$

$$z^2 = t_1 = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)}$$

$$z = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\pi k\right)}$$

$$k = 0 \to z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k = 1 \rightarrow z_2 = e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z^2 = t_2 = e^{i\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi k\right)}$$

$$z = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\pi k\right)}$$

$$k = 0 \rightarrow z_3 = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k = 1 \rightarrow z_4 = e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

نلاحظ أن لدينا 4 جذور مترافقة

$$z_1 = \overline{z_4}$$

$$z_2 = \overline{z_3}$$

مثال:

أحسب قيم التراكيب التالية

$$z = (1 - i^3)^i$$

الحل:

$$1 - i^3 = 1 + i$$

$$\|1 + i\| = \sqrt{2}$$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)}$$

$$\to z=e^{i.\ln(1-i^3)}=e^{i\left(\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\right)}=e^{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}.e^{i\ln\sqrt{2}}$$

التوابع العقدية

ليكن f تابع عقدي معرف على $\mathbb{S}$ فهو علاقة تربط بين كل نقطة z من $\mathbb{S}$ بنقطة من $\mathbb{C}$(عدد w).

$$w=f(z)$$

$$f:S\longrightarrow\mathbb{C}$$

z متحول التابع، S مجموعة التعريف

يرمز للمستقر الفعلي للتابع f بـ $rang\ f$

$$w=f(z)=f(x+iy)=f(\rho e^{i\varphi})$$

$$=u(x,y)+i\,v(x,y)$$

$$u=Re(z)$$

$$v=Im(z)$$

مثال:

ليكن $f(z)=z^2+i$ أوجد u,v

الحل:

$$f(z)=(x+iy)^2+i$$

$$f(z)=x^2-y^2+2ixy+i$$

$$\to u = x^2 - y^2 \,, v = 2xy + 1$$

إذا ارتبط z بنقطة وحيدة لها وفق f نسمي f تابع وحيد الفرع (التعيين).

إذا ارتبط z بأكثر من عدد لها وفق f نسمي f تابع متعدد القيم (الفروع).

إذا استطعنا فصل $f(z)$ إلى v و u يكون التابع وحيد القيمة وإن لم نستطع يكون متعدد القيمة.

أمثلة:

f لها قيمة وحيدة $z \,, ||z|| \,, \cos z$

f متعددة القيم $\ln z \,, \arg z \; \sqrt{z}$

أحب عندما يقول لي الناس لا يمكنك تحقيق ذلك ؛ لأنه طوال حياتي والناس يقولون لي لن تنجح أبداً

تد تيرنر ، مؤسس شبكة CNN